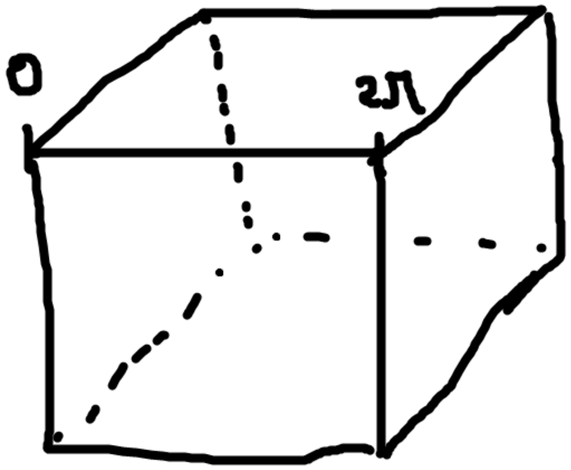
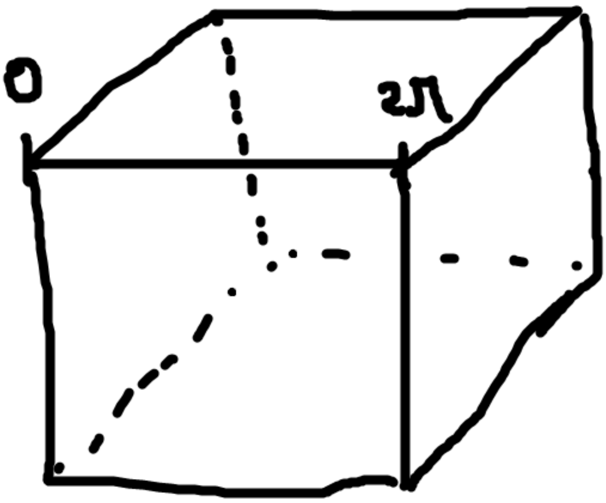
Поговорим ещё раз про алгебры Ли.

Сравним группу перестановок и группу непрерывных поворотов. Что-то в них разное.
Говорите – порядок группы? В одном случае он бесконечный, в другом конечный. Хорошо, рассмотрим группу сдвигов на рациональные длины (или углы). У неё бесконечный порядок, но что-то в ней не так…
Помните, в 4-й методичке мы говорили «бесконечно малые повороты». А как вот это (что нам интуитивно понятно) определить формально? А нужно некое соответствие элементам группы в R^N.
Теперь понятно:
SO2 соответствует полуинтервал от 0 до 2π:

SO3 вот такой вот кубик:



И SU2



SU3 будет соответствовать 8-мерный (по числу генераторов) куб (нарисуйте сами ☺)

Так откуда те монструозные определения?

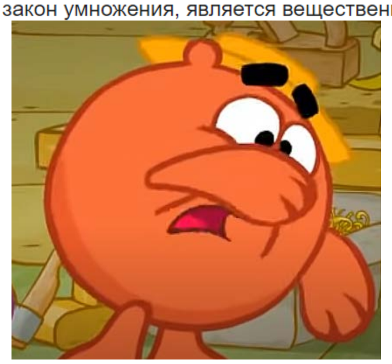
Группой Ли над полем K ($K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) называется группа G, снабжённая структурой дифференцируемого (гладкого) многообразия над K, причём отображения mul и inv, определённые так:

$$\mathrm{mul}\colon G \times G \to G;\quad \mathrm{mul}\,(x, y) = xy,$$

$$\mathrm{inv}\colon G \to G;\quad \mathrm{inv}\ x = x^{-1}$$

являются гладкими (в случае поля $\mathbb{C}$ требуют голоморфности введённых отображений).

Другими словами, группой Ли называется топологическая группа, если она является параметрической и если функция, задающая закон умножения, является вещественно-аналитичной[1].



А вот давайте посмотрим, что у нас по осям координат.

$$G(\theta_i) = \text{Поворот на углы } \theta_i = \prod_{i=1}^{3} \exp(\theta_i \widehat{X}_i)$$

Вероятно, вы думаете, что θ_i? Ага, как же. Математики считают, что должен быть цельный объект $\theta_i \widehat{X}_i$.

А что такое это $\theta_i \widehat{X}_i$? Вся проблема в $\widehat{X}_i$. Вообще говоря, это и есть элементы алгебры Ли.

Что такое алгебра Ли?

Говоря о группе Ли, частенько говорят «касательное пространство», «дифференцируемое многообразие»… Это связано с тем мы рассматриваем

$$G(\theta_i) = \text{Поворот на углы } \theta_i = \prod_{i=1}^{3} \exp(\theta_i \widehat{X}_i)$$

А математики хотят

$$dG(\theta_i) = \sum_i \theta_i \widehat{X}_i$$

или даже

$$\frac{\partial G(\theta_i)}{\partial \theta_i} = \widehat{X}_i$$

Понятно, что это одно и то же. Но запись $dG(\theta_i) = \sum_i \theta_i \widehat{X}_i$ позволяет нам интуитивно понять, откуда взялся термин «касательное пространство», а $\frac{\partial G(\theta_i)}{\partial \theta_i} = \widehat{X}_i$ - «дифференцируемое.

Нафиг оно нам надо? А дело в том, что нам, физикам, словосочетание «группа поворотов» вполне очевидно. И то, что любой поворот можно представить как суперпозицию поворотов по всем осям – тоже. Математики же всё хотят определить через их любимую теорию множеств. Поэтому они сначала определяют